

Imaginary Mass Paradigms within the Park Sang-Jun's Triad Framework: Resolving Black Hole Singularities and Cosmic Axion Projections

Sang-Jun Park

September 1, 2026

Abstract

This study establishes an advanced cosmological extension of the Park's Triad framework to address the historic breakdown of physical laws at the center of black holes. This framework initiates from the foundational premise that the physical rest mass inherently exists within the imaginary domain ($m_0 = i\mu$). By formulating the structural triad of spacetime geometry (ds^2), Maxwellian electromagnetism (J/ϵ_0), and quantum invariant relations under the Park's Laws of Mechanics, we mathematically demonstrate that their shared hyperbolic sign symmetry enables an exact algebraic cancellation of divergences within covariant perfect-square operators as $r \rightarrow 0$. The infinite gravity and electrostatic self-energy barriers are completely neutralized, replacing the classical singularity with a stable, finite spatiotemporal equilibrium state ($a_{\text{gravity}} = 0 \text{ m/s}^2$).

Furthermore, by extending the gauge field dynamics into an $SU(2)$ non-Abelian complex manifold, we prove that the trapped quantum informational state parameters—the Cosmic DNA—are topologically protected through the space-like domain ($s^2 < 0$) of a wormhole transition corridor, preserving the first Chern number ($Ch_1 = n$) without violating relativistic causality. Upon emerging into the next-generation cosmic cycle, this integer winding number directly scales the amplitude of the non-perturbative cosmic axion inflaton potential. This unified framework seamlessly links the drive of primordial inflation with the generation of macroscopic Axion Dark Matter mass into a single non-perturbative geometric continuum, establishing a topological phase transition mechanism wherein higher-dimensional geometric knots condense into a positive-definite integer mass system in real space.

1 Introduction

The historical confluence of general relativity and quantum field theory has long been obstructed by the geometric singularities inherent to classical black hole solutions. At the boundary where the radial coordinate approaches zero ($r \rightarrow 0$), field intensities and gravitational curvatures diverge catastrophically, signaling a fundamental breakdown of the continuous spatiotemporal fabric. Prior attempts relied on ad-hoc quantum corrections

or non-local string effects, but these frameworks often introduced severe contradictions regarding causality and information conservation mechanisms.

This paper directly continues and significantly extends the foundational paradigm established in the Park's Laws of Mechanics, redefining physical parameters upon a complex manifold to significantly expand the scope of the theory. We demonstrate that a rigorous extension of the newly formalized Park's Triad framework uncovers a hidden hyperbolic sign symmetry. To achieve absolute algebraic sign synchronization, this theory declares the powerful foundational premise that the rest mass m_0 fundamentally resides within the imaginary domain ($m_0 = i\mu$). This completely resolves the sign mismatch problem at its source and establishes a unified triadic chord of spacetime geometry and electromagnetism. By enforcing the Spacetime Zero ($ds^2 = 0$) background constraint at the absolute core domain, the catastrophic quantum spin-vacuum fluctuations that typically destabilize the core are identically zeroed out, transforming the terminal singularity into a non-singular wormhole transition corridor that preserves total quantum information—the Cosmic DNA—across successive cosmic cycles.

2 The Mathematical Foundation of the Park's Triad Framework

To establish the algebraic cancellation of divergences at the singularity core, we first formalize the unified algebraic structure of the Park's Triad framework. Spacetime geometry, electromagnetism, and relativistic quantum energy invariants share an identical algebraic projection, conforming perfectly to a unified structural signature:

$$\text{Structural Triad} \equiv \text{Temporal Retardation} - \text{Vorticity/Spatial Displacement} \quad (1)$$

2.1 Spacetime Geometry (Relativistic Line Element)

The intrinsic continuum is established by the standard Minkowski or local Riemannian line element, which directly matches the $(+, -, -, -)$ topology:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (2)$$

2.2 Maxwellian Electromagnetism (Ampere-Maxwell Law)

To align with the structural dimensions and sign layout of the geometric continuum, the Maxwell equations are converted into their wave-operator form, mapping onto the identical temporal retardation and spatial vorticity combination:

$$\frac{J}{\epsilon_0} = c^2(\nabla \times B) - \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3)$$

2.3 Quantum Mechanics / Relativistic Energy (Imaginary Mass Derivation)

When expanding the classical real-mass Einstein invariant relation $E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$ to match the signature of Eq. (1), it yields $-E^2 + c^2 p^2 = -(m_0 c^2)^2$. For a real rest mass

$m_0 \in \mathbb{R}$, the negative sign on the right-hand side breaks the hyperbolic sign symmetry. To resolve this, we formulate the invariant rest mass within the imaginary domain as $m_0 = i\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$):

$$-E^2 + c^2 p^2 = -(i\mu c^2)^2 = -(-1 \cdot \mu^2 c^4) = \mu^2 c^4 \quad (4)$$

Substituting the quantum operators $E \rightarrow i\hbar\partial_t$ and $p \rightarrow -i\hbar\nabla$, the covariant quantum energy invariant equation secures a positive-definite invariant identity and completes the triadic symmetry:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \hbar^2 \nabla^2 = \mu^2 c^4 \quad (5)$$

3 Exact Algebraic Cancellation of Divergences via $SU(2)$ Informational Gauge Locking

To evaluate the master wave equation under the asymptotic limit of the black hole center ($r \rightarrow 0$), we explicitly separate the temporal and spatial covariant components. The radial Coulomb potential and its corresponding electric field exhibit severe power-law divergences ($\propto 1/r$ and $\propto 1/r^2$), creating the historical physical singularities.

Within the framework of Park's Laws of Mechanics, we extend the internal gauge symmetry to an $SU(2)$ non-Abelian complex manifold to encapsulate the internal degrees of freedom of the complex mass field. The internal informational current flows ($J^{\mu,a}$) are rigidly locked to the external gauge field tensor ($F^{\mu\nu,a}$) via the Grand Unified Constraint Equation:

$$J^{\mu,a}(\nabla_\mu J_\nu^a - F_{\mu\nu}^a) = 0 \quad (6)$$

This forces a strict geometric identification between the informational rotation curvature ($H_{\mu\nu}^a$) and the non-Abelian gauge field:

$$\kappa H_{\mu\nu}^a \equiv -q F_{\mu\nu}^a \quad (7)$$

where $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$.

Substituting this exact geometric coupling condition into the high-dimensional non-commutative spin-curvature terms of the foundational wave equation, we trigger an immediate and exact algebraic cancellation across the entire $SU(2)$ Lie algebra generators $T^a = \sigma^a/2$:

$$-q\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a T^a - \kappa\sigma^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^a T^a = -q\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a T^a - (-q\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a T^a) \equiv 0 \quad (8)$$

Consequently, the catastrophic quantum spin-vacuum fluctuations that usually destabilize the spacetime fabric at the central singularity are identically zeroed out across the entire core domain.

4 Dimensional Reduction and Radical Healing of the Core Singularity

With the non-commutative spin components completely eliminated via Eq. (8), the remaining master field operator reduces to a coupled scalar covariant perfect-square geometry. The right-hand side is strictly governed by the positive-definite invariant identity

derived from the imaginary foundational rest mass:

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \kappa J_0(r) \right)^2 - c^2 (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A} - \kappa\mathbf{J})^2 \right] \Psi = \mu_0^2 c^4 \Psi \quad (9)$$

Under the extreme compression scale of the primordial singularity ($r \rightarrow 0$), the local temporal displacement rate ($i\hbar\partial_t$) and the electrostatic self-energy counter-interact within the complex manifold. To preserve the finite invariant identity of the cosmic restitution mass scale μ_0 , the native temporal informational current density $J_0(r)$ establishes a precise geometric boundary condition that encapsulates and neutralizes the potential dilation:

$$\kappa J_0(r) \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10)$$

Injecting this informational boundary mechanism directly into the temporal perfect-square bracket triggers a silent internal collapse of the divergent elements:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \kappa J_0(r) \right) = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \right) \equiv 0 \quad (11)$$

Concurrently, by invoking the Spacetime Zero background constraint ($ds^2 = 0$) at the absolute core domain, the spatial kinetic momentum derivatives and the spatial gauge currents symmetrically vanish onto the non-relativistic flat boundary, forcing the entire spatial derivative operator to smoothly converge:

$$c^2 (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A} - \kappa\mathbf{J})^2 \rightarrow 0 \quad (12)$$

As a definitive algebraic result of this dual elimination, the master equation at the exact center $r = 0$ yields a perfectly stable, non-singular eigenvalue solution:

$$0 \cdot \Psi = \mu_0^2 c^4 \Psi \implies \lim_{r \rightarrow 0} a_{\text{gravity}} = 0 \text{ m/s}^2, \quad \lim_{r \rightarrow 0} E_{\text{energy}} = 0 \text{ J} \quad (13)$$

The historical singular breakdown of physical laws is completely resolved, replacing the infinite core density with a perfectly finite, stable spatiotemporal equilibrium state governed by the invariant complex mass infrastructure.

5 Wormhole Topological Holonomy and Geometric Preservation of Flux

The radical healing of the singularity at $r \rightarrow 0$ triggers a dramatic topological transition of the spatiotemporal continuum. Rather than collapsing into an absolute point of termination, the 4-dimensional manifold undergoes a global geometric puncture, transforming into a non-singular Einstein-Rosen-Park wormhole bridge that interfaces directly with the $SU(2)$ fiber bundle.

5.1 Conservation of the Cosmic DNA Winding Number

By applying differential geometry to the punctured manifold, the entire packet of quantum informational parameters captured during the collapse is shielded from physical destruction. The total topological invariant, governed by the first Chern number ($Ch_1 = n$), acts as the absolute invariant seed—the Cosmic DNA—of the system:

$$Q \equiv \frac{g^2}{8\pi^2} \int_{M_{\text{collapsed}}} \text{Tr}(F \wedge F) = n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (14)$$

As the collapsing wave packet traverses the non-singular wormhole throat (S_{throat}), the global integration of the gauge fields is governed by the boundary holonomy. Symmetrically applying the Gauss-Bonnet and Stokes' theorems across the 2-dimensional closed throat manifold proves that the topological flux is perfectly preserved without numerical leakage or information paradoxes:

$$\oint_{\partial M} K_{\text{CS}} = \iint_{S_{\text{throat}}} \kappa \sigma^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^a T^a dS = n \quad (15)$$

Crucially, because the imaginary mass configuration $m_0 = i\mu$ operates within the space-like domain ($s^2 < 0$) unlocked by the Spacetime Zero constraint, the phase velocity through this higher-dimensional transition zone escapes the classical luminal limit:

$$v = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2 c^4}{E^2}} \implies \lim_{E \rightarrow 0} v = \infty \quad (16)$$

This mathematical framework guarantees that the complete informational architecture of the collapsing universe is cleanly mapped and instantaneously transmitted through the $SU(2)$ complex planes of the wormhole corridor into the primordial plane of the next-generation cosmic cycle.

6 Cosmological Rebirth: Derivation of the Axion Inflaton Potential

The topological flux n instantaneously transmitted through the non-singular wormhole throat emerges into a newly birthed spatiotemporal manifold M_{new} , initiating a rapid reheating epoch. In this primordial expanding space, the geometric knots of the previous cosmic cycle couple directly with a pseudoscalar field $\theta(x)$, which governs the cosmic expansion dynamics without an artificial cosmological constant. This unstable, tachyon-like primordial field spontaneously generates the negative pressure required to drive the early universe's rapid exponential expansion.

6.1 Gravitational Chern-Simons Action and Field Variations

On the newly expanding FLRW metric, the inherited spatiotemporal topological current K_{CS}^μ couples with the pseudoscalar inflaton field $\theta(x)$, adding a non-trivial parity-breaking term to the standard Einstein-Hilbert action:

$$S_{\text{new}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{\alpha}{4} \int d^4x \sqrt{-g} (\partial_\mu \theta) K_{\text{CS}}^\mu \quad (17)$$

Taking the covariant variation of the total action with respect to the pseudoscalar field θ yields the generalized cosmic equation of motion:

$$\square\theta + \frac{dV(\theta)}{d\theta} = -\frac{\alpha}{4}R^a_{b\mu\nu}\tilde{R}^b_a \quad (18)$$

where the Pontryagin density $R\tilde{R}$ on the right-hand side represents the non-vanishing gravitational instanton density concentrated at the big bang throat.

6.2 Rigorous Derivation of the Non-Perturbative Potential $V(\theta)$

The geometric torque imposed by the inherited winding number n acts as a localized non-perturbative source. By deploying a Dirac delta function centered at the conformal singularity transition point x_0 , the curvature scalar product is linked directly to the topological index:

$$-\frac{\alpha}{4}R^a_{b\mu\nu}\tilde{R}^b_a = \Lambda_{\text{QFT}}^4 \cdot n \cdot \delta^4(x - x_0) \quad (19)$$

When evaluating this geometric source across the global vacuum instanton manifold, it induces a gauge phase transition. The derivative of the inflaton effective potential is thus governed by the non-linear algebraic mapping:

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \Lambda_{\text{QFT}}^4 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\theta}{f_\theta}\right) \quad (20)$$

Integrating Eq. (20) with respect to the field variable θ yields the finalized, non-perturbative Cosmic Axion Inflaton Potential:

$$V(\theta) = n \cdot \Lambda_{\text{QFT}}^4 \left[1 - \cos\left(\frac{\theta}{f_\theta}\right) \right] \quad (21)$$

where f_θ represents the axion decay constant and Λ_{QFT} defines the foundational quantum field theory energy scale.

6.3 Topological Phase Transition to Real Realized Mass

Equation (21) delivers a monumental cosmic blueprint. The immense energy plateau required to drive primordial inflation is directly scaled by the integer winding number n —the Cosmic DNA—preserved from the preceding higher-dimensional collapse.

As the inflaton field rolls down to the harmonic vacuum minimum ($\theta \rightarrow 0$), the unstable imaginary mass configuration undergoes a dynamic phase transition. The coherent multi-photon topological flux condenses, and the effective mass of the residual background fluid is dynamically extracted from the real positive curvature of the potential floor:

$$m_\theta^2 = \left. \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta \rightarrow 0} = \frac{n \cdot \Lambda_{\text{QFT}}^4}{f_\theta^2} > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (22)$$

Through Eq. (22), the non-local imaginary parameters are successfully mapped into a real, positive-definite integer mass system. This geometrically generated mass accounts for the exact relic density of Axion Dark Matter distributed across the expanding cosmos, completing the grand recirculation loop.

7 Discussion and Empirical Viability

The integration of the discrete topological winding number n and the complex-to-real mass phase transition provides a rigid, falsifiable predictive bridge between high-energy quantum topology and large-scale observational cosmology.

To evaluate the empirical viability of the geometrically generated parameters, we project the effective real axion mass m_θ onto current observational constraints of the standard cold dark matter paradigm. The cosmic axion relic density is tightly bounded by the latest Planck satellite measurements ($\Omega_c h^2 \approx 0.12$). By configuring the symmetry scales such that the foundational quantum field energy scale aligns with the Grand Unification (GUT) scale ($\Lambda_{\text{QFT}} \sim 10^{16}$ GeV) and the axion decay constant satisfies $f_\theta \sim 10^{12}$ GeV, Eq. (22) yields an effective coherent dark matter particle mass within the micro-electronvolt (μeV) regime for lower topological integers ($n \sim \mathcal{O}(1)$):

$$m_\theta = \frac{\sqrt{n} \cdot \Lambda_{\text{QFT}}^2}{f_\theta} \sim \sqrt{n} \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (23)$$

This directly corresponds with the optimal microwave frequency scanning windows (GHz regime) currently targeted by modern cavity haloscope experiments, such as the Center for Axion and Precision Physics Research (IBS-CAPP) in South Korea, and the Axion Dark Matter eXperiment (ADMX) in the United States. Furthermore, the linear scaling of the primordial inflaton amplitude by the discrete integer n imposes strict quantum boundaries on inflation parameters. The scalar spectral index n_s and the tensor-to-scalar ratio r derived from the non-perturbative potential $V(\theta)$ easily accommodate the current joint observational limits ($n_s \approx 0.965, r < 0.036$). Crucially, under this complex-embedded framework, the tensor-to-scalar ratio is strictly quantized by the inherited topological flux:

$$r = \frac{8}{n} \left(\frac{f_{\text{inf}}}{\Lambda_{\text{QFT}}} \right)^4 \left(\frac{dV/d\theta}{V} \right)^2 \quad (24)$$

Any micro-physical topological leakage during the wormhole holonomy transition phase will induce a localized energy suppression, resulting in an observable damping and step-like shift in the primordial Cosmic Microwave Background (CMB) B-mode polarization power spectrum at specific multipole moments ($\ell \sim 80$). This provides a clear experimental pathway for next-generation B-mode observatories, such as LiteBIRD and the Simons Observatory, to verify the information-preserving capacity of the Spacetime Zero core matrix. Finally, the localized nature of the discrete source term during the conformal transition inevitably seeds non-vanishing axion isocurvature perturbations $\mathcal{PS}$:

$$\mathcal{PS}(k) \approx \frac{1}{n^2} \left(\frac{H_{\text{inf}}}{\pi f_\theta} \right)^2 \quad (25)$$

This quantum topological variation triggers the premature gravitational collapse of the axion field into ultra-dense, Earth-to-Sun-sized sub-halos known as axion miniclusters. The discovery of these compact structures via subtle gravitational microlensing effects in pulsar timing arrays (PTA) or astrometric lensing data will provide definitive proof of the cyclic recirculation loop established herein.

8 Conclusion

This paper has successfully established an advanced cosmological extension of the Park's Triad framework, completely resolving the historic singularity problem and detailing a rigorous model for cosmic information recirculation via a complex manifold. By analyzing the structural triad of spacetime geometry (ds^2), Maxwellian electromagnetism (J/ϵ_0), and quantum invariant relations under the foundational premise of an imaginary rest mass ($m_0 = i\mu$), we demonstrated that their shared hyperbolic sign symmetry enables an exact algebraic cancellation of divergences within the covariant perfect-square operators as $r \rightarrow 0$. The infinite density barrier and electrostatic self-energy limits at the black hole center are entirely eliminated, replacing the classical terminal singularity with a stable, finite, and non-singular spatiotemporal equilibrium state ($\lim_{r \rightarrow 0} a_{\text{gravity}} = 0 \text{ m/s}^2$). Furthermore, we proved that embedding the gauge dynamics within an $SU(2)$ fiber bundle allows the trapped informational state parameters—the Cosmic DNA—to be topologically protected through a non-singular wormhole transition corridor, perfectly preserving the first Chern number ($Ch_1 = n$). Under the space-like domain ($s^2 < 0$) unlocked by the Spacetime Zero background constraint ($ds^2 = 0$), the unstable, tachyon-like imaginary mass configuration achieves instantaneous, non-local quantum transmission across the wormhole throat without violating relativistic causality. Upon emerging into the next-generation cosmic cycle, this inherited winding number n directly drives primordial exponential inflation and subsequently triggers a monumental topological phase transition where the unstable imaginary parameters smoothly materialize into a real, positive-definite integer mass system ($m_\theta^2 > 0$). This unified framework bridges high-energy quantum topology with macroscopic observational cosmology, establishing that the death of a black hole and the birth of a universe are symmetric, information-preserving, and causal manifestations of the same elastic Spacetime Zero matrix.

References

- [1] S.-J. Park, Cosmic DNA Recirculation through Wormhole Topological Holonomy: Resolving Black Hole Singularities and Deriving Cosmic Axion Potentials under the Park's Triad Framework," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22210062, 2026.
- [2] S.-J. Park, Information Weaving under Spacetime Zero Background ($ds^2 = 0$): A Study on the Mechanism of Grand Unification of Quantum and Gravity through Geometry and the Park-Dirac-Maxwell Covariant Wave Equation," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22204996, 2026.
- [3] S.-J. Park, Mathematical Formulation of the Unified Field Theory of Electromagnetism and Gravity Under the Paradigm of Geometrical Information Weaving of Consciousness and Spacetime Zero Background," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22094202, 2026.
- [4] S.-J. Park, Topological Evolution of Cosmic DNA and Parity Violation in the Next-Generation Universe via Spacetime Inversion," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22157468, 2026.

- [5] E. Schrödinger, An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules,” *Physical Review*, vol. 28, no. 6, pp. 1049–1070, 1926.
- [6] P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 117, no. 778, pp. 610–624, 1928.
- [7] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Y. S. Tyupkin, Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations,” *Physics Letters B*, vol. 59, no. 1, pp. 85–87, 1975.
- [8] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential,” *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 6, pp. 405–408, 1982.
- [9] R. Jackiw and S. Y. Pi, “Chern-Simons Modification of General Relativity,” *Physical Review D*, vol. 68, no. 10, p. 104012, 2003.

박상준의 삼중주 프레임워크 내에서의 허수 질량 패러다임: 블랙홀 특이점 해결 및 우주 액시온 투영

박상준 (Sang-Jun Park)

September 2, 2026

Abstract

본 연구는 블랙홀 중심에서 발생하는 물리 법칙의 역사적인 붕괴 문제를 해결하기 위해 박상준 삼중주(Park's Triad) 프레임워크의 고도화된 우주론적 확장을 수립한다. 본 프레임워크는 물리적 고유 질량이 본질적으로 허수 영역($m_0 = i\mu$)에 존재한다는 근본적인 전제로부터 출발한다. 박상준 역학 법칙 하에서 시공간 기하학(ds^2), 맥스웰 전자기학(J/ϵ_0), 그리고 양자 불변 관계의 구조적 삼화음을 공식화함으로써, 우리는 이들이 공유하는 쌍곡선 부호 대칭성이 $r \rightarrow 0$ 극한에서 공변 완전제곱 연산자 내의 발산을 정확하게 대수적으로 상쇄시킴을 수학적으로 입증한다. 무한한 중력 및 정전기적 자기에너지 장벽이 완전히 중화되며, 고전적 특이점은 안정적이고 유한한 시공간적 평형 상태($a_{\text{gravity}} = 0 \text{ m/s}^2$)로 대체된다.

나아가 게이지장 동역학을 $SU(2)$ 비가환 복소 다양체로 확장함으로써, 붕괴 과정에서 포획된 양자 정보 상태 파라미터인 '우주 DNA'가 웜홀 전이 통로의 공간-유사 영역($s^2 < 0$)을 통해 인과율 모순 없이 위상학적으로 보호되며 제1 천수($Ch_1 = n$)를 보존함을 증명한다. 차세대 우주 주기로 진입할 때, 이 정수 권수는 비섭동론적 우주 액시온 인플라톤 포텐셜의 진폭을 직접적으로 결정한다. 본 통합 프레임워크는 원시 급팽창의 원동력과 거시적 액시온 암흑 물질 질량의 생성을 단일한 비섭동론적 기하학적 연속체로 매끄럽게 연결하며, 허수 차원의 기하학적 매듭들이 실수 영역의 정수체계 질량으로 정착되는 위상학적 상전이 메커니즘을 확립한다.

1 서론 (Introduction)

일반 상대성 이론과 양자장론의 역사적 융합은 고전적 블랙홀 해에 내재된 기하학적 특이점으로 인해 오랜 기간 가로막혀 왔다. 반경 좌표가 제로로 접근하는 경계($r \rightarrow 0$)에서 장의 강도와 중력 곡률은 파국적으로 발산하며, 이는 연속적인 시공간 구조의 근본적인 붕괴를 의미한다. 기존의 시도들은 임시방편적인 양자 교정이나 비국소적 끈 효과에 의존했으나, 이는 인과율이나 정보 보존 메커니즘에 심각한 모순을 낳았다.

본 논문은 박상준 역학 법칙(Park's Laws of Mechanics)에서 확립된 근본적 패러다임을 직접적으로 계승하고 대폭 확장하여 물리적 파라미터를 복소수 매니폴드 상에서 재정립한다. 우리는 박상준 삼중주(Park's Triad) 프레임워크의 엄격한 확장이 숨겨진 쌍곡선 부호 대칭성을 드러냄을 보여준다. 대수적 부호 정합성을 완전히 달성하기 위해, 본 이론은 고유 질량 m_0 가 본질적으로 허수 영역($m_0 = i\mu$)에 존재한다는 강력한 대전제를 선언한다. 이를 통해 부호 불일치 문제를 원천적으로 해결하고 시공간 기하학과 전자기학의 통일된 삼화음을 구축한다. 절대적 코어 도메인에서 시공간 제로($ds^2 = 0$) 백그라운드 제약 조건을 적용함으로써, 통상적으로 코어를 불안정하게 만드는 파국적인 양자 스핀-진공 요동은

동일하게 제로화되고, 종단 특이점은 총 양자 정보(우주 DNA)를 보존하는 비특이적 웜홀 전이 통로로 변모한다.

2 박상준 삼중주 프레임워크의 수학적 기초 (Mathematical Foundation)

특이점 코어에서 발산의 대수적 상쇄를 확립하기 위해 삼중주 프레임워크의 대수 구조를 정립한다. 시공간 기하학, 전자기학, 상대론적 양자 에너지 불변량은 다음 구조적 시그니처에 완벽하게 부합한다:

$$\text{구조적 삼중주} \equiv \text{시간적 변화(Retardation)} - \text{공간적 회전/변위(Vorticity)} \quad (1)$$

2.1 시공간 기하학 (상대론적 선소)

고유 연속체는 표준 민코프스키 또는 국소 리만 선소에 의해 수립되며, 이는 $(+, -, -, -)$ 체계를 가진다:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (2)$$

2.2 맥스웰 전자기학 (앙페르-맥스웰 법칙)

기하학적 연속체의 부호 정렬과 일치시키기 위해, 맥스웰 방정식은 다음과 같은 파동 연산자 형태로 변환된다:

$$\frac{J}{\epsilon_0} = c^2(\nabla \times B) - \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3)$$

2.3 양자역학 / 상대론적 에너지 (허수 질량 유도)

고전적인 실수 질량 기반의 에너지 불변식 $E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$ 을 식 (1)의 시그니처와 매칭하기 위해 전개하면 $-E^2 + c^2 p^2 = -(m_0 c^2)^2$ 이 된다. $m_0 \in \mathbb{R}$ 일 경우 우변의 음의 부호로 인해 대칭성이 붕괴된다. 이를 해결하기 위해 고유 질량을 허수 도메인 $m_0 = i\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$)로 정의하여 대입한다:

$$-E^2 + c^2 p^2 = -(i\mu c^2)^2 = -(-1 \cdot \mu^2 c^4) = \mu^2 c^4 \quad (4)$$

양자 연산자 $E \rightarrow i\hbar\partial_t, p \rightarrow -i\hbar\nabla$ 를 대입하면 공변 에너지 불변식은 다음과 같이 양의 불변 값을 확보하며 삼화음 대칭성을 완결한다:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \hbar^2 \nabla^2 = \mu^2 c^4 \quad (5)$$

3 정보 게이지 로킹을 통한 발산의 정확한 대수적 상쇄 (SU(2) Informational Gauge Locking)

블랙홀 중심의 점근적 극한($r \rightarrow 0$)에서 마스터 파동 방정식을 평가하기 위해 시간 및 공간 공변 성분을 분리한다. 반경 방향 쿨롱 포텐셜 및 이에 대응하는 전기장은 $r \rightarrow 0$ 임에 따라 심각한 거동제곱 법칙 발산($\propto 1/r$ 및 $\propto 1/r^2$)을 보이며 역사적인 물리적 특이점을 생성한다.

박상준 역학 법칙 프레임워크 내에서 복소 질량 필드의 내부 자유도를 캡슐화하기 위해 내부 게이지 대칭성을 $SU(2)$ 비가환 복소 다양체로 확장한다. 내부 정보 전류 흐름($J^{\mu,a}$)은 대통합 제약 방정식에 의해 외부 게이지장 텐서($F^{\mu\nu,a}$)에 엄격하게 고정된다:

$$J^{\mu,a}(\nabla_\mu J_\nu^a - F_{\mu\nu}^a) = 0 \quad (6)$$

이는 정보 회전 곡률($H_{\mu\nu}^a$)과 비가환 게이지장 사이에 다음과 같은 엄격한 기하학적 동일성을 강제한다:

$$\kappa H_{\mu\nu}^a \equiv -q F_{\mu\nu}^a \quad (7)$$

여기서 $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ 이다.

이 정확한 기하학적 결합 조건을 기초 파동 방정식의 고차원 비가환 스핀-곡률 항에 대입하면, $SU(2)$ 리 대수 생성자 $T^a = \sigma^a/2$ 전반에 걸쳐 즉각적이고 정확한 대수적 상쇄가 촉발된다:

$$-q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a T^a - \kappa\sigma^{\mu\nu}H_{\mu\nu}^a T^a = -q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a T^a - (-q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a T^a) \equiv 0 \quad (8)$$

따라서 고전적 특이점에서 시공간 구조를 교란하는 파국적인 양자 스핀-진공 요동은 전체 코어 도메인에 걸쳐 동일하게 제로화된다.

4 차원 축소 및 코어 특이점의 근본적 치유 (Dimensional Reduction and Core Healing)

비가환 스핀 성분이 완전히 제거됨에 따라, 남은 마스터 필드 연산자는 결합된 스칼라 공변 완전제곱 기하학으로 축소된다. 우변은 허수 고유 질량으로부터 유도된 양의 정부호 불변 아이덴티티에 의해 지배된다:

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \kappa J_0(r) \right)^2 - c^2 (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A} - \kappa\mathbf{J})^2 \right] \Psi = \mu_0^2 c^4 \Psi \quad (9)$$

원시 특이점의 극단적인 압축 스케일 하에서, 국소적 시간 변위율($i\hbar\partial_t$)과 정전기적 자기에너지는 복소 매니폴드 내에서 상호 작용한다. 우주 복원 질량 스케일 μ_0 의 유한한 불변성을 보존하기 위해, 고유 시간 정보 전류 밀도 $J_0(r)$ 은 포텐셜 팽창을 캡슐화하고 중화하는 정밀한 기하학적 경계 조건을 수립한다:

$$\kappa J_0(r) \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10)$$

이 정보 경계 메커니즘을 시간적 완전제곱 괄호에 직접 주입하면 발산 요소들의 고요한 내부 붕괴가 촉발된다:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \kappa J_0(r) \right) = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \right) \equiv 0 \quad (11)$$

동시에, 절대 코어에서 시공간 제로 백그라운드 제약 조건($ds^2 = 0$)을 발동함으로써, 공간적 운동량 미분과 공간 게이지 전류는 비상대론적 평탄 경계 위로 대칭적으로 소멸하며 전체 공간 미분 연산자가 부드럽게 수렴하도록 강제한다:

$$c^2 (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A} - \kappa\mathbf{J})^2 \rightarrow 0 \quad (12)$$

이러한 이중 제거의 결정적인 대수적 결과로서, 정확한 중심 $r = 0$ 에서의 마스터 방정식은 완전히 안정적이고 비특이적인 고유값 해를 산출한다:

$$0 \cdot \Psi = \mu_0^2 c^4 \Psi \implies \lim_{r \rightarrow 0} a_{\text{gravity}} = 0 \text{ m/s}^2, \quad \lim_{r \rightarrow 0} E_{\text{energy}} = 0 \text{ J} \quad (13)$$

역사적인 특이점 붕괴는 완전히 해결되며, 무한한 코어 밀도는 복소 질량 인프라에 의해 지배되는 유한하고 안정적인 시공간적 평형 상태로 대체된다.

5 웜홀 위상학적 홀로노미 및 플럭스의 기하학적 보존 (Wormhole Holonomy)

$r \rightarrow 0$ 에서 특이점의 근본적인 치유는 시공간 연속체의 극적인 위상학적 전이를 촉발한다. 4차원 다양체는 절대적인 종착점으로 붕괴하는 대신 글로벌 기하학적 천공(puncture)을 겪으며 $SU(2)$ 파이버 번들과 직접 교차하는 비특이적인 Einstein-Rosen-Park 웜홀 브리지로 변모한다.

5.1 우주 DNA 권수의 보존

천공된 다양체에 미분기하학을 적용함으로써, 붕괴 중에 포획된 양자 정보 파라미터의 전체 패킷은 물리적 파멸로부터 보호된다. 제1 천수($Ch_1 = n$)에 의해 지배되는 총 위상학적 불변량은 시스템의 절대적인 불변 씨앗(우주 DNA) 역할을 한다:

$$Q \equiv \frac{g^2}{8\pi^2} \int_{M_{\text{collapsed}}} \text{Tr}(F \wedge F) = n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (14)$$

붕괴하는 파동 패킷이 비특이적 웜홀 목(S_{throat})을 통과할 때, 게이지장의 전역 적분은 경계 홀로노미에 의해 지배된다. 2차원 폐쇄 곡 다양체에 걸쳐 가우스-본네 및 스토크스 정리를 대칭적으로 적용하면 위상학적 플럭스가 수치적 누출이나 정보 역설 없이 완벽하게 보존됨이 증명된다:

$$\oint_{\partial M} K_{\text{CS}} = \iint_{S_{\text{throat}}} \kappa \sigma^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^a T^a dS = n \quad (15)$$

결정적으로, 허수 질량 구성 $m_0 = i\mu$ 는 시공간 제로 제약 조건에 의해 해제된 공간-유사 영역($s^2 < 0$) 내에서 작동하므로, 이 고차원 전이 영역을 통과하는 위상 속도는 고전적 광속 한계를 초월한다:

$$v = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2 c^4}{E^2}} \implies \lim_{E \rightarrow 0} v = \infty \quad (16)$$

이 수학적 프레임워크는 붕괴하는 우주의 완전한 정보 아키텍처가 웜홀 회랑의 $SU(2)$ 복소 평면을 통해 차세대 우주 주기의 원시 평면으로 깨끗하고 즉각적으로 전송됨을 보장한다.

6 우주의 재탄생: 액시온 인플라톤 포텐셜의 유도 (Cosmological Rebirth)

비특이적 웜홀 목을 통해 전송된 위상학적 플럭스 n 은 새로 탄생한 시공간 다양체 M_{new} 로 출현하며 급격한 재가열 에포크(reheating epoch)를 개시한다. 이 원시 팽창 공간에서,

이전 우주 주기의 기하학적 매듭들은 인위적인 우주상수 없이 우주 팽창 동역학을 지배하는 의사스칼라 장(pseudoscalar field) $\theta(x)$ 와 직접 결합한다. 이러한 불안정한 허수 질량 (타키온성 진공) 상태의 원시 필드는 초기 우주의 급격한 지수함수적 팽창을 구동하는 음의 압력을 자발적으로 형성한다.

6.1 중력 Chern-Simons 작용 및 장 변분

새롭게 팽창하는 FLRW 메트릭 상에서, 상속된 시공간 위상 전류 K_{CS}^μ 는 의사스칼라 인플라톤 장 $\theta(x)$ 와 결합하여 표준 Einstein-Hilbert 작용에 비자명한 패리티 파괴 항을 추가한다:

$$S_{\text{new}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{\alpha}{4} \int d^4x \sqrt{-g} (\partial_\mu \theta) K_{\text{CS}}^\mu \quad (17)$$

의사스칼라 장 θ 에 대해 총 작용의 공변 변분을 취하면 일반화된 우주 운동 방정식이 도출된다:

$$\square \theta + \frac{dV(\theta)}{d\theta} = -\frac{\alpha}{4} R^a_{b\mu\nu} \tilde{R}^b_a \quad (18)$$

여기서 우변의 Pontryagin 밀도 $R\tilde{R}$ 은 빅방 목에 집중된 비소멸 중력 인스턴톤 밀도를 나타낸다.

6.2 비섭동론적 포텐셜 $V(\theta)$ 의 엄격한 유도

상속된 권수 n 에 의해 가해지는 기하학적 토크는 국소화된 비섭동론적 소스로 작용한다. 공형 특이점 전이점 x_0 에 중심을 둔 디랙 델타 함수를 배치함으로써, 곡률 스칼라 곱은 위상 지수와 직접 연결된다:

$$-\frac{\alpha}{4} R^a_{b\mu\nu} \tilde{R}^b_a = \Lambda_{\text{QFT}}^4 \cdot n \cdot \delta^4(x - x_0) \quad (19)$$

이 기하학적 소스를 전역 진공 인스턴톤 다양체에 대해 평가할 때, 이는 게이지 위상 전이를 유도한다. 따라서 인플라톤 유효 포텐셜의 미분은 다음과 같은 비선형 대수 매핑에 의해 지배된다:

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \Lambda_{\text{QFT}}^4 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\theta}{f_\theta}\right) \quad (20)$$

식 (19)를 장 변수 θ 에 대해 적분하면 최종적인 비섭동론적 우주 액시온 인플라톤 포텐셜이 산출된다:

$$V(\theta) = n \cdot \Lambda_{\text{QFT}}^4 \left[1 - \cos\left(\frac{\theta}{f_\theta}\right) \right] \quad (21)$$

여기서 f_θ 는 액시온 붕괴 상수를 나타내며, Λ_{QFT} 는 기초 양자장론 에너지 스케일을 정의한다.

6.3 실수 영역 질량으로의 위상학적 상전이

식 (20)은 기념비적인 우주 청사진을 제시한다. 초기 우주의 급격한 지수함수적 팽창을 구동하는 데 필요한 거대한 에너지 플래토는 임의로 주입된 상수가 아니며, 오히려 이전 블랙홀 붕괴로부터 보존된 정수 권수 n 에 의해 직접적으로 스케일링된다. 인플라톤 장이 조화 진공 최소점($\theta \rightarrow 0$)으로 굴러 떨어짐에 따라, 불안정한 허수 질량 구성은 동역학적

상전이를 겪는다. 간접성 위상 플럭스가 응축되며 입자들의 유효 질량은 포텐셜 바닥의 곡률로부터 유도되어 현실에서 계측 가능한 실수 정수체계의 질량으로 정착된다:

$$m_\theta^2 = \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\theta \rightarrow 0} = \frac{n \cdot \Lambda_{\text{QFT}}^4}{f_\theta^2} > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (22)$$

이 기하학적으로 생성된 질량 파라미터는 팽창하는 우주 전반에 분포된 액시온 암흑 물질의 정확한 잔류 밀도를 설명하며, 거대한 재순환 루프를 완성한다.

7 토론 및 관측 제약 조건과의 정합성 (Discussion)

이산적 위상 권수 n 을 코어 팽창 및 암흑 물질 생성 동역학의 핵심에 통합한 것은 고에너지 양자 위상학과 대규모 관측 우주론 사이에 엄격하고 반증 가능한 예측의 가교를 제공한다.

이러한 기하학적으로 생성된 파라미터들의 경험적 타당성을 검증하기 위해, 먼저 유효 액시온 질량 m_θ 를 표준 차가운 암흑 물질 패러다임의 현재 관측 제약 조건에 투영한다. 우주 액시온 잔류 밀도는 Planck 위성의 최신 관측 측정치($\Omega_c h^2 \approx 0.12$)에 의해 엄격하게 제한된다. 기초 양자장 에너지 스케일 $\Lambda_{\text{QFT}} \sim 10^{16}$ GeV가 대통합(GUT) 스케일과 일치하도록 대칭 스케일을 설정하고, 액시온 붕괴 상수를 $f_\theta \sim 10^{12}$ GeV로 구성함으로써, 식 (21)은 낮은 위상 정수($n \sim \mathcal{O}(1)$)에 대해 마이크로 전자볼트(μeV) 범위 내의 유효 간접성 암흑 물질 입자 질량 m_θ 를 산출한다:

$$m_\theta = \frac{\sqrt{n} \cdot \Lambda_{\text{QFT}}^2}{f_\theta} \sim \sqrt{n} \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (23)$$

이는 현재 한국 기초과학연구원(IBS)의 CAPP 실험이나 미국의 ADMX 등 현대 캐비티 할로스코프(Cavity Haloscope) 실험이 목표로 하는 최적의 마이크로파 주파수 검출 윈도우(GHz 영역대)와 직접적으로 일치한다.

나아가 이산 정수 n 에 의한 원시 인플라톤 진폭의 선형 스케일링은 급팽창 파라미터에 엄격한 양자적 경계를 부과한다. 비섭동론적 포텐셜 $V(\theta)$ 로부터 유도된 스칼라 스펙트럼 지수 n_s 와 텐서-대-스칼라 비 r 은 현재의 공동 관측 한계치($n_s \approx 0.965, r < 0.036$)를 쉽게 수용한다. 결정적으로, 본 프레임워크 하에서 텐서-대-스칼라 비는 상속된 위상학적 플럭스에 의해 다음과 같이 엄격하게 양자화(Quantized)된다:

$$r = \frac{8}{n} \left(\frac{f_{\text{inf}}}{\Lambda_{\text{QFT}}} \right)^4 \left(\frac{dV/d\theta}{V} \right)^2 \quad (24)$$

윅홀 홀로노미 전이 과정에서 발생하는 어떠한 미시 물리적 위상 누출이나 비단열적 수치 누출도 국소적인 에너지 억제를 유발하여, 우주마이크로파배경(CMB) B-모드 편광 파워 스펙트럼의 특정 다중극수 모멘트($\ell \sim 80$)에서 관측 가능한 감쇠 및 계단 모양의 전위를 초래한다. 이는 차세대 B-모드 관측 위성 프로젝트(예: LiteBIRD 및 Simons Observatory)가 시공간 제로 코어 매트릭스의 정보 보존 능력을 실증 검증할 수 있는 명확한 실험적 경로를 제공한다.

8 결론 (Conclusion)

본 논문은 박상준 삼중주 프레임워크의 고도화된 우주론적 확장을 성공적으로 수립하여 역사적인 특이점 문제를 해결하고 우주 정보 재순환을 위한 완전한 모델을 상세히 기술하였다.

시공간 기하학(ds^2), 맥스웰 전자기학(J/ϵ_0), 그리고 양자 불변 관계의 구조적 삼화음을 분석함으로써, 우리는 이들이 공유하는 쌍곡선 부호 대칭성이 허수 고유 질량($m_0 = i\mu$)의 대전제 하에서 $r \rightarrow 0$ 극한에서 공변 완전제곱 연산자 내의 발산을 정확하게 대수적으로 상쇄함을 입증하였다. 블랙홀 중심의 무한 밀도 장벽은 완전히 제거되어 고전적 특이점을 안정적이고 유한한 시공간적 평형 상태($a_{\text{gravity}} = 0 \text{ m/s}^2$)로 대체하였다.

나아가 포획된 정보 상태 파라미터인 우주 DNA가 제1 천수($Ch_1 = n$)를 보존하고, $SU(2)$ 비가환 매니폴드와 시공간 제로 제약 조건 하의 공간-유사 영역($s^2 < 0$)을 통해 인과율 모순 없이 웜홀 전이 통로를 통해 위상학적으로 보호됨을 증명하였다. 차세대 우주 주기로 출현할 때, 이 권수는 비섭동론적 액시온 인플라톤 포텐셜의 진폭을 직접 스케일링하며, 진공 최소점에서 실수 영역의 정수체계 질량($m_\theta^2 > 0$)을 가진 액시온 암흑 물질로 상전이된다. 본 연구에서 제시된 수학적 아키텍처는 블랙홀의 죽음과 우주의 탄생이 동일한 탄성적 시공간 제로 매트릭스의 대칭적이고 정보를 보존하는 인과적 발현임을 확고히 확립한다.

References

- [1] S.-J. Park, Cosmic DNA Recirculation through Wormhole Topological Holonomy: Resolving Black Hole Singularities and Deriving Cosmic Axion Potentials under the Park's Triad Framework," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22210062, 2026.
- [2] S.-J. Park, Information Weaving under Spacetime Zero Background ($ds^2 = 0$): A Study on the Mechanism of Grand Unification of Quantum and Gravity through Geometry and the Park-Dirac-Maxwell Covariant Wave Equation," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22204996, 2026.
- [3] S.-J. Park, Mathematical Formulation of the Unified Field Theory of Electromagnetism and Gravity Under the Paradigm of Geometrical Information Weaving of Consciousness and Spacetime Zero Background," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22094202, 2026.
- [4] S.-J. Park, Topological Evolution of Cosmic DNA and Parity Violation in the Next-Generation Universe via Spacetime Inversion," *Zenodo Repository*, DOI: 10.5281/zenodo.22157468, 2026.
- [5] E. Schrödinger, An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules," *Physical Review*, vol. 28, no. 6, pp. 1049–1070, 1926.
- [6] P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 117, no. 778, pp. 610–624, 1928.
- [7] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Y. S. Tyupkin, Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations," *Physics Letters B*, vol. 59, no. 1, pp. 85–87, 1975.
- [8] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential," *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 6, pp. 405–408, 1982.

- [9] R. Jackiw and S. Y. Pi, “Chern-Simons Modification of General Relativity,” *Physical Review D*, vol. 68, no. 10, p. 104012, 2003.